

Zur
Theorie der Algolveränderlichen.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Hohen Philosophischen Fakultät der Georg-August-Universität
zu Göttingen

vorgelegt von

Josef Weber

aus Brünn in Mähren.

REMOTE STORAGE

Göttingen 1913.

Druck der Dieterichschen Universitäts-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Angenommen von der math.-naturwissenschaftlichen Abteilung.

Tag der mündlichen Prüfung: 21. Juli 1913.

Referent: Prof. Dr. J. Hartmann.

9m617-5-12

W338 ✓

REMOTE STORAGE

Meinem Vater.

Einleitung.

Vorliegende Arbeit gibt in ihrem ersten Teile eine Zusammenstellung und kurze Charakteristik des an verschiedenen Stellen über theoretische Behandlung der Algollichtkurven veröffentlichten Materials, während ihr zweiter Teil auf Grund einfacher mathematischer Betrachtungen zur Entwicklung einer neuen Methode führt. Den Schluß bildet dann deren Anwendung auf einige praktische Beispiele.

Der Besprechung im ersten Teile werden allerdings mit Rücksicht auf den hier verfolgten Zweck nur die Arbeiten unterzogen, deren Methoden sich in der Literatur über Algolsterne häufiger — wenn auch manchmal mit beachtenswerten Abänderungen — wiederfinden. War es bisher das Streben der Bearbeiter des Algolproblems gewesen, die Lichtkurve d. h. die für jeden beobachteten Zeitpunkt gefundene Größenklasse an der Hand geometrischer Betrachtungen zu ermitteln, so besteht das wesentlich Neue des zweiten Teiles in der Definition und Behandlung der *Intensitätskurve*, deren neuartige Abweichung von dem bisherigen Gebrauche hinsichtlich der Abszissen hier nur kurz hervorgehoben sei. Die dann entwickelten Methoden gestatten in den Fällen, die z. B. von Russell mit 3. und 4. bezeichnet werden (siehe S. 7) unter der auch von diesem zunächst gemachten Annahme gleichförmig leuchtender Scheiben¹⁾ ein weiteres Vordringen als bisher, nämlich bis zu dem S. 19 definierten Grenzwert des Neigungswinkels. So dürfte doch, trotz der vortrefflichen Arbeiten H. N. Russells²⁾ bei deren Erscheinen vorliegende Schrift in ihrem Hauptteil bereits fertiggestellt war, hierdurch auch ein Beitrag zur Behandlung des Algolproblems gegeben sein.

1) Ist eine merkliche Abschattierung nach dem Rand zu vorhanden, so werden die dann auftretenden systematischen Unterschiede zwischen Beobachtung und Rechnung zur Ermittlung ihres Gesetzes führen.

2) Astroph. Journal, Vol. 35, 36.

Zur Geschichte des Problems.

Die Entdeckungen am Fixsternhimmel Ende des 16., Anfang des 17. Jahrhunderts, so 1572 das Aufleuchten eines neuen Sternes in der Cassiopeia beobachtet von Tycho Brahe, das Verschwinden von α Ceti erkannt im Oktober 1596 durch David Fabricius, schließlich der neue Stern des Jahres 1604 im Ophiuchus, dem Kepler¹⁾ besondere Aufmerksamkeit gewidmet hat, fanden eine erste annehmbare Deutung durch Riccioli²⁾. Er erklärt die Erscheinung der neuen Sterne durch verschiedene Helligkeitsverteilung auf den um ihre Achse rotierend gedachten Himmelskörpern. Die hier allerdings nur für neue Sterne gegebene, später mit dem Namen Fleckentheorie bezeichnete Erklärung wurde dann von Boulliau³⁾ auf den inzwischen als veränderlich erkannten Stern α Ceti angewandt. Damit war auch ihre Anwendung auf die in dieselbe Zeit fallende Entdeckung der Veränderlichkeit des Sternes β Persei (Algol) durch Montanari⁴⁾ gegeben. In der neueren Astronomie findet sich die Fleckentheorie bei Zöllner⁵⁾ wieder, bis sie schließlich von Bruns⁶⁾ erschöpfend behandelt wurde. Das Ergebnis der letztgenannten Untersuchungen sei hier wiedergegeben: Es ist immer, und zwar auf unendlich viele Weisen möglich, eine Lichtverteilung auf einem Sterne so anzugeben, daß bei Rotation desselben um seine Achse, der Lichtwechsel sich innerhalb vorgeschriebener, beliebig enger Grenzen dem tatsächlich beobachteten anschließt.

Eine andere Erklärung des Algolphänomens gab Goodricke⁷⁾ im Jahre 1783. Er hält die Annahme eines Begleiters, der zwischen uns und Algol tritt und so den Lichtwechsel bedingt, für ebenso wahrscheinlich, wie die Fleckentheorie. Des historischen Interesses halber sei die darauf bezügliche Bemerkung hier wörtlich

1) Gründtlicher Bericht von einem ungewöhnlichen Newen Stern gestellt durch Johan Khepplern. Prag 1605.

2) Giovanni Battista Riccioli. *Almagestum novum*. Bologna 1651.

3) Ismael Boulliau. *De stella nova in collo Ceti*. *Astronomia philolaica*. Paris 1667.

4) Vergl. Du Hamel's: *Historia Regiae Scientiarum Academiae*, liber IV, pag. 362.

5) Zöllner, *Photometrische Untersuchungen*. Leipzig 1865.

6) H. Bruns, *Bemerkungen über den Lichtwechsel der Sterne vom Algoltypus*. Akad. Berlin 1881. S. 48.

7) John Goodricke: *A Series of Observations on, and a discovery of the Period of Algol*. *Phil. Trans.* 1783.

wiedergegeben: *I should imagine it could hardly be accounted for otherwise than either by the interposition of a large body revolving round Algol, or some kind of motion of its own, whereby part of its body, covered with spots or such like matter, is periodically turned towards the earth.* Erst hundert Jahre später finden wir diese Idee wieder bei E. C. Pickering¹⁾, der sie zum erstenmal zu einer Bestimmung der Elemente des Systemes β Persei aus der Lichtkurve verwendet. Die dabei gemachten Annahmen waren:

- 1) Die beiden Komponenten des Systems können als Kugeln angesehen werden.
- 2) Der Hauptstern ist von überall gleicher Flächenhelligkeit.
- 3) Der Begleiter ist absolut dunkel und
- 4) projiziert sich zur Zeit des Minimums so auf den Hauptstern, daß innere Berührung der Projektionsfiguren statt hat.

Die Annahmen 1, 2 und 3 macht auch Joh. Harting in seiner Inaugural-Dissertation, München 1889 und zeigt, daß Pickerings Annahme 4 wohl zu einer ersten Näherung zu verwenden ist; das so erhaltene Elementensystem wird dann aber von ihm durch Aufstellung eines aus den geometrischen Beziehungen leicht erhältlichen Differentialausdruckes in Helligkeit, Radienverhältnis, Entfernung der Zentren beider Komponenten und Bahnneigung bei Berücksichtigung möglichst vieler Punkte der Lichtkurve nach der Methode der kleinsten Quadrate verbessert. War Pickering bei der Annahme einer Kreisbahn stehen geblieben, so geht Harting auch in dieser Hinsicht einen Schritt weiter, indem er eine elliptische Bahn annimmt. Von einer ersten Hypothese über die Beträge der Exzentrizität und Perihelzeit ausgehend, gelangt er dann unter Berücksichtigung der für die elliptische Bewegung geltenden Formeln und bei Hinzuziehung zahlreicher Punkte der Lichtkurve mittels Ausgleichsrechnung zur Kenntnis der Größen: Große Achse, Perihellänge, Perihelzeit, Neigung, Exzentrizitätswinkel und Radienverhältnis der beiden Komponenten.

Eine Methode zur Bestimmung der Exzentrizität der Bahn gab Tisserand²⁾ im Jahre 1895 an. Er betrachtet den Ausdruck, der sich für die scheinbare Distanz ϱ der Zentren der Komponenten ergibt, als Funktion des sogenannten Phasenwinkels w , der durch den Ausdruck

$$w = \frac{2\pi}{P} \cdot (t - T)$$

definiert wird. Hierin bedeutet P die Periode des Lichtwechsels, T die Epoche des Minimums, t die Zeit. Wird nun auf den Ausdruck, der die Distanz ϱ als Funktion von w darstellt, die Minimums-Betrachtung der Differentialrechnung angewandt, dann die zwischen wahrer, mittlerer Anomalie und dem Winkel w bestehende Beziehung berücksichtigt, so erhält man einen Ausdruck für die Zeiten der Minima, in dem noch die Exzentrizität e und die Länge des Periastrons α als

1) E. C. Pickering, Dimension of the fixed stars etc. Proceedings of the American acad. of Arts and Sciences, vol. XVI, 1881.

2) Tisserand, Comptes rendus, vol. 120, S. 125.

Unbekannte vorkommen. Ist nun andererseits eine gute empirische Formel für die Minimumepochen aus den Beobachtungen abgeleitet, so ermöglicht eine Gliedervergleichung der Tisserandschen und der empirischen Formel, eine einfache Bestimmung von α und e . Auch darin bringt Tisserands erwähnte Arbeit eine neue Idee in die Theorie der Algolveränderlichen, daß die in dem Betrage der Periode des Lichtwechsels auftretenden Schwankungen durch die Annahme eines abgeplatteten Hauptsternes und einer damit verbundenen Bewegung der Apsidenlinie zu erklären versucht werden.

Die Idee der abgeplatteten Körper findet sich dann weiter ausgebaut in Arbeiten von C. Myers¹⁾ aus den Jahren 1896 und 98. Sie behandeln das System β Lyrae und die darin gegebenen Methoden ermöglichen die Ableitung von Bahnelementen für besonders enge Doppelsterne bei Annahme folgender Verhältnisse: die Komponenten sind einander ähnliche Rotationsellipsoide, deren kleine Achse auf der Bahnebene und der Richtung nach dem Beobachter senkrecht steht und deren Revolutionszeit gleich der eines Umlaufes in der Bahn ist. Die in einem solchen Systeme zu bestimmenden Größen erhalten die für das Folgende, trotz etwaiger Abweichungen von den besprochenen Originalarbeiten, einheitlich beibehaltenen Bezeichnungen:

- q = Verhältnis der Achsen der größeren Komponente,
- ε = Exzentrizität der Erzeugenden,
- κ = Verhältnis gleicher Achsen beider Komponenten,
- λ = Verhältnis der Flächenhelligkeiten beider Komponenten,
- a = Mittelpunktsentfernung beider Komponenten,
- i = Neigung der Bahn,
- e = Exzentrizität der Bahn.

Die im allgemeinen den schon besprochenen Methoden bei Myers ähnlich verlaufende Lösung des Problems, weicht in der Bestimmung von q , bezw. ε und e in folgender Weise ab: für verschiedene Werte von q wird unter der Annahme, die Komponenten erscheinen als gleichförmig leuchtende Scheiben der Verlauf des Lichtwechsels außerhalb der Verfinsterung berechnet, dann von den beobachteten abgezogen und schließlich derjenige ausgewählt, für den sich hierbei Konstanz des Lichtes ergibt. Zur Bestimmung von e dient ihm die unsymmetrische Lage der Maxima und Minima gegen einander.

Mit dem Problem der besonders engen Doppelsterne hat sich dann auch A. W. Roberts beschäftigt²⁾. Er geht von denselben Annahmen wie Myers aus, nur läßt er noch ein beliebiges i zu, während dieser $i = 90^\circ$ annahm. Zur Ermittlung von i und ε gibt er zwei Tabellen mit den Argumenten: i und ε^2 , die als Funktionswerthe die Größenklassenabnahme in der einen Tafel zwischen

1) C. Myers, Untersuchungen über den Lichtwechsel des Sternes β Lyrae. München 1896. Derselbe, The system of β Lyrae. Astrophys. Journ., 1898, S. 1.

2) A. W. Roberts, On the relation existing between the Light Changes and the Orbital Elements of a close Binary System. 1903. M. N. 63, 527. Derselbe, Further note. M. N. 65, 706.

Maximum und Minimum, in der andern zwischen Maximum und der in der Mitte bis zum Minimum liegenden Epoche zu entnehmen ermöglichen. Hat man in einem gegebenen Falle für die Größenklassenabnahmen die zusammengehörigen Werte von i und ε^2 aus den Tafeln entnommen und in ein Koordinatensystem eingetragen, so werden sich die beiden Kurven zusammengehöriger Werte in einem Punkte schneiden, der die für den betreffenden Fall geltenden i und ε^2 zu Koordinaten hat. Die so erhaltenen Werte von i und ε^2 führen nun unter der Annahme gleich großer, einander berührender Komponenten zu einem ersten Elementensystem. Die Abweichungen der damit gerechneten Lichtkurve von der beobachteten führen zu einer Verbesserung der Elemente nach der Methode der kleinsten Quadrate. An einigen der so erhaltenen verbesserten Elemente und zwar an i , ε^2 , der großen Achse und der Helligkeit des Hauptsterns zur Zeit des Maximums, sowie an der Epoche des Maximums bringt Roberts nun willkürliche, kleine Änderungen an und studiert deren Einfluß auf die andern Elemente, nämlich: große Achse und Helligkeit des Begleiters. Bei der zu diesem Ende vorgenommenen Ausgleichsrechnung ergibt sich eine Unbestimmtheit hinsichtlich der, an den in zweiter Näherung erhaltenen Größen κ und λ anzubringenden Verbesserungen¹⁾. Dies erklärt sich dadurch, daß eine geringe Änderung von κ bei Beibehaltung des λ , oder umgekehrt, von gleichsinnigem Einfluß auf die berechnete Lichtkurve sind. Für $\Delta\kappa$ als Unbestimmte erhält man ein Elementensystem, das nur mehr von dieser Größe abhängig ist. Ein größter Wert für $\Delta\kappa$ ergibt sich aus den für die Helligkeit der einzelnen Komponenten gefundenen Ausdrücken, deren einer das mit $\Delta\kappa$ multiplizierte Korrektionsglied mit positivem, der andere mit negativem Vorzeichen enthält; aus dem höchsten, zulässigen Betrage des letzteren ergibt sich der oben erwähnte Grenzwert für $\Delta\kappa$ und damit ein drittes definitives Elementensystem.

In den nun immer zahlreicher werdenden Monographien einzelner Algolsterne haben die Verfasser sich teilweise der bis jetzt erwähnten Methoden bedient, teilweise auch selbst solche, meistens dem speziellen Falle angepaßte, entwickelt. Alle diese zu charakterisieren würde hier zu weit führen. Dagegen sind noch zwei Arbeiten, nämlich die von S. Blažko und von H. N. Russell zu erwähnen, und da sie, namentlich die letztere, das Algolproblem in größerer Allgemeinheit behandeln, sei der Charakterisierung ihrer Gesichtspunkte hier etwas mehr Raum gegeben.

Die Arbeit von Blažko²⁾ verfolgt im wesentlichen das Ziel, die zur Berechnung der theoretischen Lichtkurve nötigen Formeln auf ein Minimum zu reduzieren, wie auch die Rechenarbeit durch Beigabe von Hilfstafeln möglichst zu erleichtern. Die gemachten Annahmen sind: Kreisbahn und gleichförmig leuchtende Kreiseiben als Projektionsfiguren der Komponenten. Blažko rechtfertigt

1) Auf eine ähnliche Unbestimmtheit ist schon bei E. Hartwig, Astr. Nachr. 152, 323 in seiner Arbeit über Z. Herculis hingewiesen. Die angewandte Methode ist die Hartingsche. 1900. Mai.

2) S. Blažko, Annales de l'observatoire astronomique de Moscou. Vol. 5, 76. 1911.

diese, indem er einen Abschnitt einer Diskussion über elliptische Körper widmet. Zunächst betrachtet er den Fall, in dem die großen Achsen der Komponenten stets mit der Verbindungslinie beider Zentren zusammenfallen. Die hierbei nötige Lichtänderung außerhalb des Minimums findet er für die weiteren Systeme noch nicht mit genügender Schärfe nachgewiesen, also vernachlässigbar. (Die besten von J. Stebbins¹⁾ mit einem Sebuphotometer ausgeführten Messungen haben aber eine solche Änderung für Algol mit aller Sicherheit erkennen lassen.) Einen anderen Fall elliptischer Körper denkt sich Blažko dadurch entstanden, daß die Projektionsfigur einer Kreisbahn kugelförmiger Körper in einem bestimmten Verhältnis senkrecht zur Knotenlinie — der Schnittlinie der Ebene der wahren Bahn mit der auf der Visierichtung senkrechten — verkürzt wird. Die dann entstehende Lichtkurve ist gleich der im Falle kugelförmiger Körper. Sobald aber die Exzentrizität beider Projektionsfiguren nicht mehr die gleiche ist, wird eine Abweichung zwischen der tatsächlichen — angenommen die Bedingung der gleichförmig leuchtenden Scheiben sei erfüllt — und der für kugelförmige Körper gerechneten Lichtkurve auftreten. Diese Abweichungen werden nach Blažkos Ansicht in das Gebiet der Beobachtungsfehler fallen, da die vorkommenden Elliptizitäten wahrscheinlich so gering sind, daß sie in erster Annäherung vernachlässigt werden können. Auf Grund dieser Betrachtungen beschränkt er sich auf die Behandlung der obengenannten vereinfachten Verhältnisse und die von ihm gegebenen Formeln ermöglichen für jedes beliebige α , i und $I =$ Intensität der größeren Komponente, die sich mit der der andern zu Eins ergänzt, die Lichtkurve mit geringer Mühe aufzustellen. Für das inverse Problem aber wird die Methode den speziell vorliegenden Fällen angepaßt. Als ersten führt Blažko den einer Konstanz des kleinsten Lichtes an. Weiter wird unterschieden zwischen dem Falle zweier und dem eines Minimums, wobei dann das zweite entweder als gar nicht vorhanden, oder aber als von der Größenordnung der Beobachtungsfehler angesehen wird. Durch geringe Änderungen vornehmlich an T_1 dem Moment des äußeren, wohl aber auch an T_2 dem des inneren Kontaktes der Projektionsfiguren und H_m , der Intensität im Minimum, wird die Übereinstimmung der, aus den anfänglich für verschiedene i gerechneten als am besten sich der beobachteten Lichtkurve anschließenden, noch verbessert. Als nächsten Spezialfall behandelt Blažko den des zur Zeit des Minimums eintretenden inneren Kontaktes. Mit dieser Hypothese will der Verfasser zur ersten Probe überhaupt jeden Fall gerechnet wissen, in dem keine Konstanz kleinsten Lichtes auftritt. Ergibt sich dabei aber keine Übereinstimmung zwischen gerechneter und beobachteter Lichtkurve, so wird man durch schrittweise Änderung²⁾ der Werte α , i und λ verschiedene Kurven rechnen und die wahrscheinlichsten Elemente zu ermitteln suchen. Wesentlich Neues bringt Blažkos Arbeit aber darin,

1) J. Stebbins, *Astrophys. Journal.* 32, 185. 1910.

2) Ein interessantes Näherungsverfahren in dieser Hinsicht findet sich schon bei Frank Schlesinger angeben. *Allegheny Observatory Public.* Vol. 1, p. 131. 1910.

daß sie das Problem eines gleich der Sonnenscheibe gegen den Rand zu abgeschattigten, allmählich verfinsterten Sternes behandelt. Die Messungen von H. C. Vogel für das Maximum des visuellen Spektrums werden zur Herstellung eines Modelles der Sonnenscheibe benutzt. Den Radius des Modelles gleich Eins gesetzt, läßt Blažko Scheiben von $R = \frac{1}{2}$, 1 und ∞ zentral darüber gleiten und mißt die bedeckten Flächen aus. Die berechneten Intensitätsabnahmen für die ausgemessenen Flächen einmal für den Fall überall gleicher, dann für den gegen den Rand zu abklingender Intensität gerechnet, ermöglichen den Unterschied der nach beiden Annahmen sich ergebenden Lichtkurven numerisch zu verfolgen. So gelangt er zu dem Resultat, daß die Lichtkurven, besonders wenn man noch einen Größenklassenunterschied Δm zwischen bedeckter und bedeckender Scheibe annimmt, ziemlich stark differieren, so z. B. im Falle $R = 1$ und $\Delta m = 3^m$ steigt diese Differenz bis nahe zu 0.3 Größenklassen an. Für das Problem der Algolsterne ergibt sich hieraus nach Blažko folgendes: Ist Konstanz des kleinsten Lichtes vorhanden, so kann nur der Fall vorliegen, daß der kleinere durch den größeren verfinstert wird, da im umgekehrten Falle vom inneren Kontakt an bis zur zentralen Bedeckung sich immerhin noch eine merkliche Lichtänderung ergibt, z. B. bis $R = \frac{1}{2}$ im Betrage von 0.06^m . Überhaupt ist die unter der vereinfachenden Annahme gleichmäßiger Helligkeit berechnete Lichtkurve nur dann als mit den besten Elementen gerechnet anzusehen, wenn sich zwischen ihr und der beobachteten derselbe Differenzenverlauf ergibt, wie er oben für die beiden Hypothesen ermittelt worden ist.

Auch Russell¹⁾ behandelt in seiner Arbeit zunächst das Problem in seiner einfachsten Form: Kreisbahn und gleichförmig leuchtende Kreisscheiben. Die vier möglichen Fälle der Lichtkurven, die sich dabei ergeben, sind:—

- 1) primäres und sekundäres Minimum, beide mit konstanter Phase,
- 2) nur ein Minimum und dieses mit konstanter Phase,
- 3) beide Minima und
- 4) nur ein Minimum ohne konstante Phase.

Gestattet die konstante Phase im Falle 1 und 2 die Ermittlung des Größen- und Helligkeitsverhältnisses, so muß doch zur Bestimmung der anderen Elemente die Lichtkurve in ihrem ganzen Verlaufe wie in den Fällen 3 und 4 herangezogen werden. Dies geschieht in folgender Weise. Russel ermittelt zunächst den der Lichtkurve entsprechenden Intensitätsverlauf²⁾. Dieser hängt von dem Radienverhältnis x der Komponenten und deren scheinbarer Distanz δ ab, u. zw.

von x und $\frac{\delta}{x}$. Dies schreibt Russell indem er, r_1 den Radius der einen Komponente und a die bedeckte Fläche nennt, in der Form

1) H. N. Russell, On the determination of the orbital elements of eclipsing variable stars. 1912. Astroph. Journ. Vol. 35; 36.

2) Russells Intensitätskurve behält die Abscissen der Lichtkurve bei, während die im zweiten Teile vorliegender Arbeit von mir gegebene Intensitätskurve hierin einem aus der scheinbaren Bahn abgeleiteten Gesetze folgt.

$$(1) \quad a = f\left(x, \frac{\delta}{r_1}\right),$$

woraus durch Umkehr

$$(2) \quad \frac{\delta}{r_1} = \Phi(x, a)$$

folgt. Für δ ergibt sich aus den geometrischen Beziehungen der scheinbaren zur wahren Bahn

$$(3) \quad \delta^2 = \cos^2 i + \sin^2 i \cdot \sin^2 w;$$

w ist mit Russels Θ identisch. Durch Verbindung von (3) und (2) erhält man

$$(4) \quad \cos^2 i + \sin^2 i \sin^2 w = r_1^2 \{ \Phi(x, a) \}^2.$$

Sind drei zusammengehörige Wertepaare a und w bekannt, so folgt aus (4)

$$(5) \quad \frac{\sin^2 w_1 - \sin^2 w_2}{\sin^2 w_2 - \sin^2 w_3} = \psi(x, a_1, a_2, a_3),$$

eine Funktion, die tabuliert werden kann und bei bekannten a_1, a_2, a_3, x zu ermitteln gestattet. (3) oder (4) dient dann zur Bestimmung von i . Bei Tabulierung von ψ verfährt Russell so, daß er zwei Werte, nämlich $a_2 = 0.6$ und $a_3 = 0.9$ — also konstant — nimmt und die Tafel bloß mit den zwei Argumenten a_1 und x anlegt. Führt man in (5) noch die Abkürzungen ein $A = \sin^2 w_2$, $B = \sin^2 w_2 - \sin^2 w_3$ so erhält man

$$(6) \quad \sin^2 w_1 = A + B\psi(x, a_1).$$

Diese Gleichung wird dann zur Bestimmung von x in folgender Weise verwendet: zwei Punkte der Lichtkurve, die man als a_2 und a_3 entsprechend ansieht, geben vermittels (6) für jedes beliebig gewählte a_1 je einen Wert von x . Die mit dem Mittelwerte der x gerechnete Lichtkurve geht durch die, den Größen a_1, a_2, a_3 entsprechenden Punkte hindurch, weicht aber von den anderen noch etwas ab. Es werden darum noch an den Ausgangswerten w_2, w_3 , d. i. den zu a_2 und a_3 gehörigen w , geringe Änderungen angebracht, die schließlich eine befriedigende Übereinstimmung zwischen berechneter und beobachteter Lichtkurve ergeben. Die Bedingung, die dabei erfüllt sein muß, ist, daß alle Punkte der Lichtkurve zu demselben mittleren Werte von x führen. Ist nun x bekannt, so gestattet Gleichung (6) genauere Werte für den Moment des äußeren und des inneren Kontaktes, namentlich für den ersteren, abzuleiten, als sie aus der beobachteten Lichtkurve abgelesen werden können. Sie mögen w' und w'' genannt werden und es entsprechen ihnen die scheinbaren Distanzen $\delta' = r_1 + r_2$, $\delta'' = r_1 - r_2$. Dies in (3) eingesetzt gibt i . Im allgemeinen wird das hier geschilderte Verfahren schon zu einer guten Übereinstimmung zwischen beobachteter und berechneter Lichtkurve führen und nur im Falle, daß äußerst genaue Beobachtungen vorliegen, wird eine Verbesserung nach der M. d. k. Qu. gerechtfertigt erscheinen. Auch hierbei strebt Russell nach möglichster Verminderung der Rechenarbeit und zeigt, daß

die Koeffizienten auf graphischem Wege gefunden werden können. Das bisher geschilderte Verfahren wird von Russel nur im Falle totaler Verfinsterung, wie sie im ersten und zweiten der obigen 4 Fälle vorkommt, verwendet, für den partieller Finsternis aber etwas umgeändert. Zur Zeit der größten Verfinsterung denkt er sich die Fläche a_0 verfinstert und drückt für jeden anderen Punkt der Lichtkurve die bedeckte Fläche in Teilen von a_0 aus. Bei der eingeschlagenen Methode bleibt jedoch das Problem der partiellen Verfinsterung, wie es in den Fällen 3 und 4 in Betracht kommt, unbestimmt, da sich für ein bestimmtes a_0 ein innerhalb weiter Grenzen liegendes x ergibt.

Die hier kurz skizzierten Methoden, die für Kreisbahnen aufgestellt sind, kehren im wesentlichen bei dem Problem elliptischer Bahnen, das Russell in einem weiteren Teile seiner Arbeit¹⁾ behandelt, wieder. Er geht von Gleichung (3) aus, setzt in sie die die elliptische Bahn charakterisierenden Größen: Excentricität, Länge des Periastrons, Radiusvektor, wahre und mittlere Anomalie, ein und gelangt unter Anwendung geschickter Abkürzungen zu Gleichungen für δ^2 , die doch wieder von der Form (3) sind, d. h. das Problem kann als Kreisbahnproblem u. zw. für das primäre Minimum vom Radius A und der Neigung γ , für das sekundäre von einem Radius B und der Neigung β angesehen werden. Diese Größen sind aber während des einzelnen Minimums, weil von w abhängig, veränderlich und Russell schlägt daher vor, zur Ermittlung von x nach den früheren Methoden, Kreisbahnen mit Mittelwerten A_m, γ_m der Rechnung zugrunde zu legen. Mit dem so gefundenen x trachtet man, unter Anbringung geringer Änderungen, die Lichtkurve im sekundären Minimum so gut als möglich zu befriedigen. Des weiteren beschäftigt sich Russell mit der Frage der Asymmetrie der Lichtkurve. Er findet eine solche durch die im Falle elliptischer Bahnen für δ^2 gefundenen Ausdrücke angezeigt, jedoch in den extremsten Fällen von so geringem numerischen Betrage, daß sie als vollständig vernachlässigbar anzusehen ist. Hiermit hat Russell seine Methode zur Behandlung des vereinfachten Problems erschöpft. Sein Verfahren zur Erlangung definitiver Bahnelemente ist folgendes: Er geht von einer fingierten Lichtkurve aus, die in jedem Punkte um denselben Betrag und in demselben Sinne von der mit Kreisbahnelementen gerechneten abweicht, als die die Beobachtungen am besten darstellende Kurve von der mit elliptischen Bahnelementen gerechneten. Diese fingierte Kurve wird durch Kreisbahnelemente so gut als möglich befriedigt. Durch die daraus sich ergebenden neuen elliptischen Elemente wird die beobachtete Lichtkurve schon sehr gut approximiert. Wohl selten wird eine so weitgehende Verfeinerung nötig sein, aber Russell will hierdurch nur zeigen, daß sein Verfahren eher zum Ziele führt, als die früher verwendeten Differentialmethoden.

Auch das Problem der elliptisch geformten Körper behandelt Russell in einem weiteren Teile seiner Arbeit. Die Unbestimmtheit der Abplattung in der Richtung der Polachse und damit auch eine solche der Neigung,

1) Ap. Journ. 36 p. 54.

die auch schon von Myers, Roberts und Blažko behandelt wurde, rät er durch Annahme plausibler Werte der Abplattung, wie sie sich in den Darwin'schen Studien über die möglichen Gleichgewichtsfiguren rotierender Körper finden, zu umgehen. Dagegen läßt sich folgender, auch schon von Myers behandelter Fall leicht verfolgen: Die Komponenten sind Rotationsellipsoide, wobei die Drehachsen der Erzeugenden die größeren sind und stets mit der Verbindungsrichtung der beiden Zentra zusammenfallen. Auch hierbei behält Russell die Projektionsfiguren als gleichförmig leuchtende Scheiben bei und berechnet aus dem Intensitätsverlauf außerhalb der Verfinsterung die Excentricität der Erzeugenden. Hierauf zieht er den durch die Elliptizität bedingten Intensitätsverlauf von dem gesamten beobachteten ab und erhält so eine „rektifizierte“ Kurve, die er dann nach den für Kreisscheiben entwickelten Methoden auswertet. Die im Falle elliptischer Komponenten möglichen Librationen sind nach Russell auf den Intensitätsverlauf von unmerklichem Einfluß. „Rektifikation“ der Lichtkurve und Anwendung der für sphärische Komponenten entwickelten Methoden empfiehlt Russell auch für den Fall von Fluterscheinungen.

Von den von Russell behandelten Erscheinungen der Reflexion und der Abschattierung der Projektionsfiguren nach dem Rande zu, sei hier nur die letzte besprochen. Von dem willkürlich angenommenen Beleuchtungsgesetz ausgehend

$$J = J_0(1 - x + x \cos i)$$

in dem dem Abschattierungskoeffizienten verschiedene Werte gegeben werden können, gelangt er für die bedeckte Fläche zu einem Ausdruck

$$a = (1 - x)f\left(\frac{\delta}{r_1}, k\right) + xf_1\left(\frac{\delta}{r_1}, k\right)$$

der für $x = 0$ sich zu der schon für gleichförmig leuchtende Scheiben auf S. 7 gegebenen Form, für $x = 1$ aber auf $a = f_1\left(\frac{\delta}{r_1}, k\right)$ reduziert und für am Rande vollständig dunkle Scheiben gilt. f_1 läßt sich auf dieselbe Art, die schon Blažko bei seiner Behandlung dieses Problems eingeschlagen hat, ermitteln. Ist dies geschehen, so ermittelt man die Umkehrfunktion Φ und Ψ ähnlich S. 8. Berechnet und tabuliert finden sich diese Funktionen in einer weiteren Publikation, die Russell im Verein mit Shapley¹⁾ veröffentlicht hat.

Die allgemeinen Eigenschaften der Intensitätskurve.

Wir betrachten zunächst den Fall der als gleichförmig leuchtende Kreisscheiben erscheinenden, in einer Kreisbahn sich bewegendenden Komponenten A und B eines Algolsystems und beantworten folgende zwei Fragen:

1. Welchen Verlauf muß der Lichtwechsel bei den gemachten Voraussetzungen nehmen, und

1) Ap. Journ. 36 p. 239.

2. wie ermittelt man, wenn ein derartiger Lichtwechsel beobachtet vorliegt, die Elemente des Sternsystems?

Zur Beantwortung von 1. haben wir folgendes sehr einfache mathematische Problem zu lösen: Die beiden Scheiben A und B bewegen sich aneinander vorbei und es sind für ihre verschiedenen relativen Lagen die verfinsterten Flächen zu berechnen. Hierzu dient Fig. 1. Das in A errichtete Koordinatensystem wird

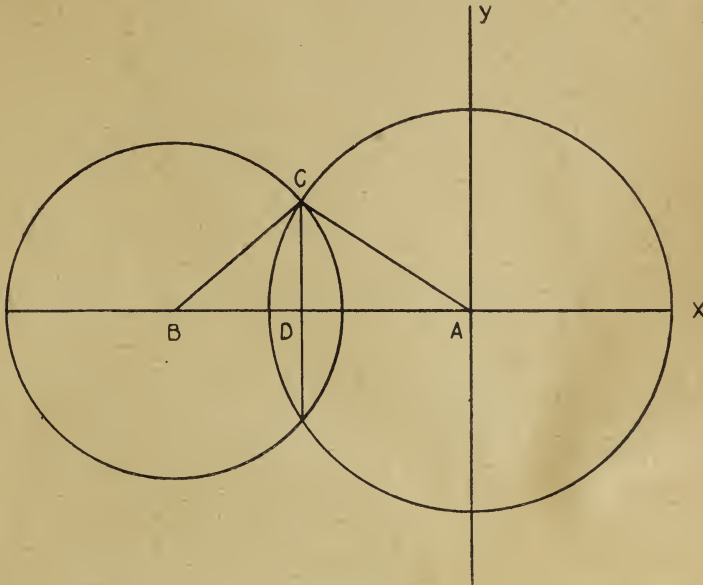


Fig 1.

stets so gelegt, daß die inbetracht kommenden Punkte die Koordinaten $A = (0, 0)$, $B = (q, 0)$, $D = (x, 0)$ erhalten. Ferner sei $AC = 1$ und $BC = x$. Aus diesen Größen läßt sich die durch B verfinsterte Fläche f von A berechnen. Trägt man nun die zu jedem q berechnete Fläche f als Ordinate in ein Koordinatensystem ein, so erhält man die hier zu betrachtende Intensitätskurve. Sie ist im Intervall $1 + x < |q| < 1 - x$ stetig und differenzierbar.

Wir können daher die in der Differentialgeometrie angegebenen Methoden zur Ermittlung ihrer allgemeinen Eigenschaften verwenden. Für das differentielle Fortschreiten der aus zwei Teilen, einen über B und einen über A zu integrierenden, sich zusammensetzenden Größe f mit q ergibt sich

$$(1) \quad df = 2[\sqrt{x^2 - (q-x)^2} \cdot d(q-x) + \sqrt{1-x^2} \cdot dx].$$

Die zwischen q und x bestehende Bezeichnung ergibt sich aus den für A und B geltenden Gleichungen

$$(A) \quad x^2 + y^2 = 1$$

$$(B) \quad (x - q)^2 + y^2 = x^2.$$

Hieraus

$$(2) \quad x = \frac{1 - x^2 + \varrho^2}{2\varrho}$$

$$(3) \quad dx = \frac{\varrho^2 - 1 + x^2}{2\varrho^2} \cdot d\varrho.$$

Für den Verlauf des ersten Differentialquotienten längs der Intensitätskurve läßt sich aus den gegebenen Formeln folgendes erkennen: Die Intensitätskurve zerfällt in zwei Äste, einen für den ϱ zunehmend die Werte $(1+x)$ bis $(1-x)$ und einen in dem es sie abnehmend durchläuft; im erstgenannten ist $\frac{df}{d\varrho}$ positiv, im zweiten negativ. Die beiden Kurvenäste liegen symmetrisch zur y -Achse. Die Punkte der Kurve, die den Werten $|\varrho| = 1+x$, $|\varrho| = 1-x$ entsprechen, sind Endpunkte und in ihnen erreicht der erste Differentialquotient den Grenzwert Null.

Untersuchen wir nun den Verlauf des zweiten Differentialquotienten. Aus (1) ergibt sich

$$(4) \quad d^2f = -2(\varrho - x)[x^2 - (\varrho - x)^2]^{-\frac{1}{2}} \cdot [d\varrho^2 - 2d\varrho dx + dx^2] - 2x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot dx^2.$$

Unter Berücksichtigung von (2) und (3) ergibt sich aus (4) die Existenz eines charakteristischen Punktes, für drei nun getrennt zu betrachtende Fälle.

Fall I.

$$x < 1 \quad \frac{d^2f}{d\varrho^2} = 0 \text{ an der Stelle } \varrho = x.$$

Dafür ergibt sich aus (2) die Bedingung

$$\varrho^2 = 1 - x^2.$$

Durch Einsetzen von (3) in (4) läßt sich auch das Nullwerden des zweiten Gliedes in (4) an der betrachteten Stelle sofort erkennen. Die Kurve hat dort einen Wendepunkt.

Fall II.

$$x > 1 \quad \frac{d^2f}{dx^2} = 0, \text{ an der Stelle } \varrho = \sqrt{x^2 - 1} \quad x = 0.$$

Hierdurch wird das zweite Glied in (4) Null; auch das erste wird Null, wenn man in den Klammerausdruck (3) einsetzt. Es wird

$$d\varrho^2 - 2d\varrho dx + dx^2 = d\varrho^2 \left[1 - \frac{\varrho^2 - 1 + x^2}{\varrho^2} + \left(\frac{\varrho^2 - 1 + x^2}{2\varrho^2} \right)^2 \right] = d\varrho^2 \left(\frac{\varrho^2 + 1 - x^2}{2\varrho^2} \right)^2.$$

Dies Null gesetzt bestätigt die oben gemachte Angabe $\varrho = \sqrt{x^2 - 1}$ und bei Berücksichtigung von (2) auch die $x = 0$. Auch hier hat die Kurve einen Wendepunkt.

Fall III.

$$\alpha = 1.$$

In diesem speziellen Falle kann von einem Wendepunkte nicht die Rede sein, da hier die in Frage kommende Stelle der Kurve singulären Charakter hat, und zwar hat die Intensitätskurve dort eine Spitze. Die hier angestellten Betrachtungen ergeben folgendes: Faßt man den Verlauf des ersten und zweiten Differentialquotienten in dem Intervall, in welchem die Intensitätskurve stetig verläuft, ins Auge, so ergibt sich ein zunächst gegen die ϱ -Achse konvex, dann konkav aufsteigender Ast, aus dessen Spiegelung an der f -Achse der absteigende Ast entsteht. Hiermit ist nun die Beantwortung der Frage 1 von S. 10 erledigt und wir gehen zur Frage 2 über.

Ermittelung der Elemente eines Sternsystems aus der Intensitätskurve.

Nehmen wir zuerst folgenden Fall an: der vollkommen dunkle Begleiter beschreibt eine Kreisbahn, deren Ebene in die Gesichtslinie fällt, so haben wir zunächst aus den an einem solchen Systeme gemachten Beobachtungen die zugehörige Intensitätskurve abzuleiten. Die Beobachtungen ergeben folgende Größen:

T = Epoche des kleinsten Lichtes.

P = Zwischenzeit zweier aufeinanderfolgender T .

m = die zu jeder beliebigen Zeit t beobachtete Größenklasse.

Die schon eingangs erwähnten, bisher stets nur der Behandlung unterzogenen Lichtkurven geben für jedes $t - T$ das zugehörige m , die Intensitätskurve dagegen soll für jedes ϱ das zugehörige f geben. Für ϱ finden wir, in dem wir mit a den Halbmesser der Bahn und mit w den durch

$$(5) \quad w = (t - T) \frac{360^\circ}{P}$$

definierten Winkel bezeichnen, den Ausdruck

$$(6) \quad \varrho = a \cdot \sin w.$$

Hierdurch ist also ein Übergang von $(t - T)$ resp. von w auf ϱ gegeben. Da aber die Intensitäten linear in ϱ fortschreitend eingetragen werden sollen, so ergibt sich aus obiger Gleichung das Gesetz für die Abscissenwerte der Intensitätskurve

$$d\varrho = a \cdot \cos w \cdot dw,$$

d. h. von der Epoche T in gleichem Winkelabstand w ausgehend, sind die Abscissen nach den cosinus dieser Winkel aufzutragen. Die Ordinaten der Intensitätskurve finden wir, indem wir die Definitionsgleichung für die Sterngrößen anwenden. Wir nennen H_0 die Intensität der Komponente A , m_0 die ihr

entsprechende Größenklasse; ist dann durch B die Fläche f von A verfinstert, so ist die Intensität $H_0 - f$ und die ihr entsprechende Größenklasse des Systemes ist m . Die Beziehung zwischen den Sterngrößen und den Intensitäten lautet dann

$$\log H_0 - \log (H_0 - f) = 0.4(m - m_0).$$

Wird die Abkürzung

$$\log n = 0.4(m - m_0)$$

eingeführt, so ergibt sich

$$(7) \quad f = \frac{H_0(n-1)}{n}$$

zur Berechnung der Ordinaten der Intensitätskurve. Nimmt man H_0 als Einheit, so erhält man

$$(8) \quad f = \frac{n-1}{n}.$$

Behalten wir dabei unsere Annahme $AC = 1$ siehe Fig. 1 S. 11 bei, so kommt auf π Flächeneinheiten eine Intensitätseinheit. Ist nun auf die eben beschriebene Weise aus den Beobachtungen die Intensitätskurve ermittelt, so ist nach dem S. 12 ff. bewiesenem sofort eine Beziehung zwischen den zu ermittelnden Größen a , x und der Größe ϱ aus dem vorhandenen Wendepunkt gegeben. Hat man eine leicht herstellbare Tafel berechnet, die für jedes x und ϱ das zugehörige f gibt¹⁾, so geht man mit dem an der Stelle des Wendepunktes in der Intensitätskurve gegebenem f in die Tafel ein und erhält sofort x , ϱ und aus dem zugehörigen w auch die Größe a mittels (6).

Betrachten wir nun den Fall, daß B auch leuchte, und zwar sei seine Intensität vom Betrage h , wenn die von A als Einheit beibehalten bleibt. Im größten Lichte ist die Intensität des Systemes $1 + h$, ist dagegen die Fläche f von A verdeckt, so ist sie $1 - f + h$. Diesen Intensitäten entsprechen die beobachteten Größenklassen m_0 fürs volle Licht, m' zur Zeit der Verfinsterung. Die Beziehung zwischen den genannten Größen ist gegeben durch

$$\log (1 + h) - \log (1 - f + h) = 0.4(m' - m_0).$$

Daraus erhält man f in der Form

$$(9) \quad f = \frac{(n-1)(h+1)}{n}$$

oder

$$(10) \quad f = \frac{n-1}{n} + h \left(\frac{n-1}{n} \right).$$

Gleichung (9) sagt aus, daß die Größe $\frac{n-1}{n}$, die nach (8) zur Berechnung

1) Eine solche Tafel ist hier zum Schluß beigelegt.

der f aus den beobachteten Sterngrößen dient, nur dann das gesuchte f gibt, wenn man $h + 1$, d. h. die Gesamtintensität des Systemes im vollen Lichte zur Einheit wählt. Gleichung (10) dagegen zeigt, daß an die gefundenen $\frac{n-1}{n}$ noch eine Verbesserung anzubringen ist, wenn die eingangs aufgestellte Intensitätseinheit beibehalten wird. Haben wir also ohne Berücksichtigung des Lichtes des Begleiters nach Formel (8) unsere Intensitätskurve aufgestellt, so haben wir zu kleine Ordinaten, die f_1 genannt werden mögen, berechnet. (10) schreibt sich bei Einführung dieser Abkürzung

$$f = f_1 + hf_1$$

oder

$$(11) \quad f = f_1(h + 1).$$

Für den Zusammenhang der f_1 - und der f -Kurve folgt durch Bildung der ersten und zweiten Ableitung von (11): 1) daß die Neigung der f -Kurve stets das $(h + 1)$ -fache der der f_1 -Kurve ist, und 2) daß der Wendepunkt der beiden Kurven an derselben Stelle liegt. In dem vorliegenden Falle werden während eines Umlaufes von B um A zwei Lichtwechsel eintreten, die als primäres bzw. sekundäres Minimum bezeichnet werden. Ist $\kappa < 1$, so ist B zur Zeit des sekundären Minimums vollständig verfinstert. Besteht zwischen vollem Licht und sekundärem Minimum die Größenklassendifferenz Δm , so läßt sich h berechnen aus

$$\log(1 + h) = 0.4 \Delta m.$$

Ist $\kappa \geq 1$, so ergibt sich zur Ermittlung von h , wenn $\Delta' m$ die Differenz zwischen vollem Licht und primärem Minimum ist

$$\log(1 + h) - \log h = 0.4 \Delta' m.$$

Mit dem so gefundenem h ist nun die f_1 - in die f -Kurve nach Formel (11) umzuwandeln. Auf diese ist dann das S. 14 beschriebene Verfahren zur Ermittlung der übrigen Elemente der Bahn anzuwenden.

Unabhängig von der Kenntnis der Helligkeit im primären oder sekundären Minimum gelangt man andererseits auch durch folgendes graphische Verfahren zur Ermittlung von κ und damit von h und den übrigen Elementen. Denkt man sich die dem Verfinsterungsvorgang entsprechende Intensitätskurve gezeichnet: vom Punkte $q = 1 + \kappa$ der Abszissenachse, der zwar stets schlecht wegen des langsamen Ansteigens definiert ist — er wird durch das Verfahren schärfer zum Ausdruck kommen, — gelangt die Intensitätskurve zu dem gut definierten Wendepunkt und Totalitätspunkt. Ersterem entspricht auf der Abszisse der Punkt $\kappa^2 - 1$ resp. $1 - \kappa^2$, letzterem $\kappa - 1$ resp. $1 - \kappa$ je nachdem ob $\kappa > 1$ oder $\kappa < 1$ ist. Zur Erläuterung diene Fig. 2 (S. 16).

Die Intensitätskurve — bloß schematisch angedeutet — entspricht in ihren Punkten N', O', P', M' , den Punkten N, O, P, M , die der Mittelpunkt des Begleiters in der Projektion auf die Sphäre einnimmt. Der Radius von A sei gleich 1 und der

von B gleich κ . Die Lage der Punkte M , P , O und N gibt den gewünschten Aufschluß über κ . Die Strecke MN hat den Wert $1 + \kappa$. Nehmen wir nun an $\kappa < 1$, so gilt

$$\begin{aligned} MP &= 1 - \kappa, \\ MO &= \sqrt{1 - \kappa^2}. \end{aligned}$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} MN + MP &= NQ = 2, \\ MN - MP &= 2\kappa. \end{aligned}$$

Haben wir durch Halbierung der Strecke NQ den Radius von A gefunden, so ziehen wir mit ihm um M einen Kreis. Andererseits ist auch aus obigen Formeln κ gefunden. Ziehen wir in O eine Senkrechte, so muß, da O der dem

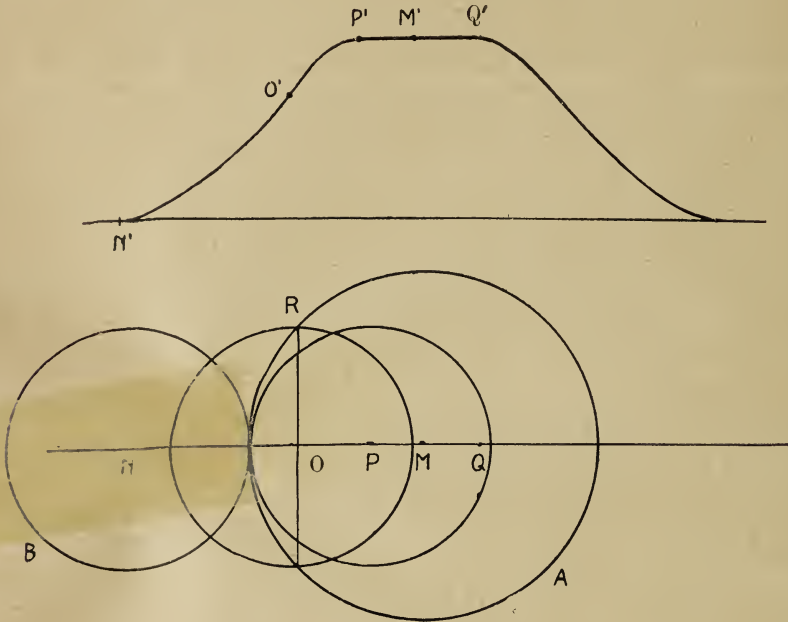


Fig. 2.

Wendepunkt entsprechende Abszissenpunkt ist, diese Gerade, den um M konstruierten Kreis in R treffen, so daß $OR = \kappa$ wird. Ist diese Probe der Konstruktion nicht eingetroffen, so wird man durch geringe Änderung der Position des Punktes N bald zur richtigen Lösung gelangen. Auch bei der Annahme $\kappa > 1$ erhält man aus ähnlichen Beziehungen dasselbe gegenseitige Verhältnis der beiden Komponentenradien. Welcher der beiden Fälle vorliegt ergibt die Intensitätskurve. (Siehe z. B. das im letzten Teile vorliegender Arbeit gegebene Beispiel *Z-Draconis*.) Hat man so durch Ausmessung der gefundenen Strecken κ ermittelt, so entnimmt man aus der Tafel den zugehörigen Wendepunktsbetrag von f und erhält durch Vergleichung mit dem der gegebenen Intensitätskurve nach Formel (11) Aufschluß über den Wert von h . Das hiermit gegebene Verfahren zur Ermittlung dieser Größe hat gegenüber den bisher angegebenen den

Vorteil, daß man gar nicht die Existenz des sekundären Minimums, das oft ziemlich undeutlich ausgedrückt ist, zu berücksichtigen braucht. Man hat hiermit auch ein Mittel, um einen etwa vorhandenen reflektierten Betrag¹⁾ der von A auf B hingestrahnten Intensität im sekundären Minimum genau angeben zu können. Hiermit ist die Betrachtung über Systeme, deren Bahnebene durch die Visierichtung geht, erschöpft.

Betrachten wir nun den Fall einer gegen die Visierichtung geneigten Bahn, so ergibt sich aus der Lage des Koordinatensystems, das im Punkte M rotierend gedacht wird für die Intensitätskurve im allgemeinen derselbe Verlauf wie S. 13 nur mit dem Unterschiede, daß sie über einen bestimmten Wert von $\varrho = \varrho_0$, der sich aus den geometrischen Beziehungen zu

$$\varrho_0 = a \cdot \cos i$$

ergibt, hinaus nicht definiert ist. Unter i ist der Winkel verstanden, den die Ebene der Bahn mit der Tangentialebene an die Sphäre einschließt. Es ist zunächst die Intensitätskurve aus den Beobachtungsdaten des Lichtwechsels aufzustellen. Zu diesem Ende muß ähnlich S. 13 der Zusammenhang zwischen ϱ und w ermittelt werden; er ergibt sich aus der sich als Ellipse projizierenden Kreisbahn zu

$$\varrho^2 = a^2 \sin^2 w + a^2 \cos^2 w \cdot \cos^2 i.$$

Durch Differentiation ergibt sich daraus für ein gleichförmiges Fortschreiten in den Abszissen die Bedingung

$$d\varrho = \frac{a \cdot \sin w \cdot \cos w \cdot \sin^2 i}{\sqrt{\sin^2 w \cdot \sin^2 i + \cos^2 i}} \cdot dw.$$

Daraus folgt im Falle großer Werte von w und i und bei Verschmelzung des von i abhängigen Gliedes mit dem konstanten zu a_1 die Form

$$d\varrho = a_1 \cdot \cos w \cdot dw.$$

Nach der Aufstellung der Intensitätskurve, zunächst unter der Annahme B sei absolut dunkel, schlägt man dasselbe Verfahren wie S. 14 ein. Für das f an der Stelle des Wendepunktes erhält man aus der Tafel das zugehörige α und ϱ_1 ; nimmt man dann noch einen anderen Punkt der Kurve und sucht für das ihn charakterisierende f aus der Kolonne des gefundenen α das zugehörige ϱ_2 , so erhält man zwei Gleichungen zur Ermittlung von a und i

$$\varrho_1^2 = a^2 \sin^2 w_1 + a^2 \cos^2 w_1 \cos^2 i,$$

$$\varrho_2^2 = a^2 \sin^2 w_2 + a^2 \cos^2 w_2 \cos^2 i.$$

Somit sind alle Elemente des Systems gefunden. Zeigt sich aber bei Berücksichtigung anderer Kurvenpunkte zur Ermittlung der Werte a und i ein starkes

1) Das Problem der Rückstrahlung ist noch wenig geklärt, vgl. J. Stebbins, Ap. J. 32, S. 185; Ap. J. 33, S. 395; Wilsing, A. N. 124, S. 121; Nordmann, Bulletin Astr. 27, S. 145.

Abweichen der gefundenen Größen von einander und ist in ihnen ein Gang zu erkennen, je nachdem vor oder hinter dem Wendepunkt gelegene Punkte zu ihrer Bestimmung benutzt wurden, so deutet dies auf die Existenz eines leuchtenden Begleiters. Es wird dann ein dem auf S. 15 beschriebenen ähnliches graphisches Verfahren einzuschlagen sein, zu dessen Darstellung Fig. 3a und b dienen mögen.

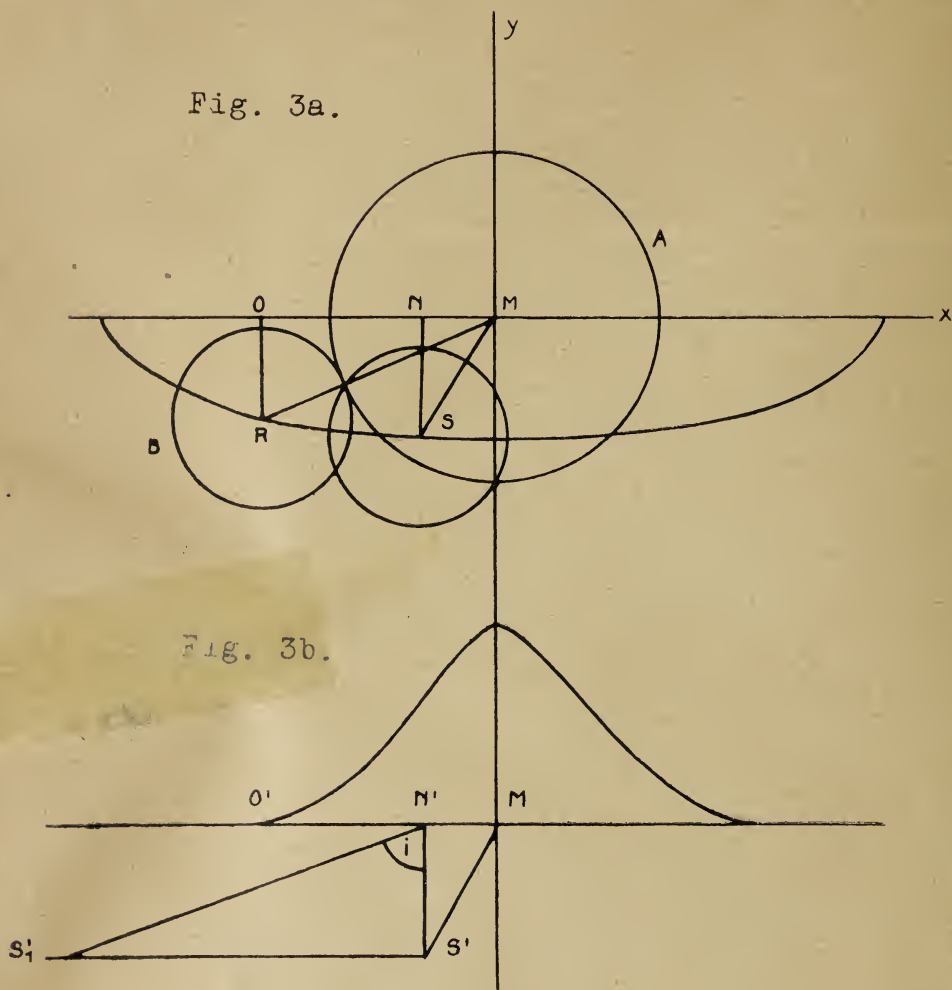


Fig. 3a versinnbildlicht uns den Vorgang, dem die in 3b¹⁾ gegebene Intensitätskurve entspricht — zwar nicht in voller Strenge, da sie ja nicht mit φ , sondern mit x fortschreitend sich aus den Beobachtungen ergeben hat —. Aus ihr bekommen wir zunächst den dem Wendepunkte entsprechenden Abszissenpunkt N' . Aus 3a ergibt sich für $M'N'$ das gleich MN ist der Wert

$$M'O' = (1 + \kappa) \cdot \cos u_1.$$

1) Zu Fig. 3b: lies M' statt M .

Ferner

$$M'N' = \sqrt{1 - \kappa^2} \cdot \cos u_2.$$

Darin ist

$$u_1 = \sphericalangle OMR,$$

$$u_2 = \sphericalangle NMS,$$

$$\operatorname{tg} u_1 = \frac{OR}{OM} = \frac{\cos w_1 \cdot \cos i}{\sin w_1} = \operatorname{ctg} w_1 \cdot \cos i,$$

$$\operatorname{tg} u_2 = \frac{NS}{NM} = \operatorname{ctg} w_2 \cdot \cos i.$$

Im Punkte N' errichtet man eine Senkrechte. Nimmt man nun eine beliebige Neigung i an, so erhält man für den dem Punkte N' zugehörigen Winkel w_2 nach obiger Formel u_2 . Dies von M' aus aufgetragen schneidet die in N' errichtete Senkrechte in dem Punkte S' einem Punkte der scheinbaren Bahnellipse. Nach einer Konstruktion der darstellenden Geometrie erhält man nun den Radius a der Kreisbahn, durch deren Neigung gegen die Gesichtslinie die Bahnellipse entsteht. Trägt man gegen $N'S'$ von N' aus i auf, errichtet in S' ein Lot zu $N'S'$, so gibt die Strecke $N'S'_1$ auf der Verlängerung von $N'S'$ aufgetragen durch Verbindung des Endpunktes mit M' die Größe a , den Halbmesser der Bahn. Ist das angenommene i nahezu oder ganz richtig gewesen, so wird auch durch Abtragen des Winkels u_1 von M' und durch Errichtung eines Lotes in O' ein Punkt R' sich ergeben, der auch ein Punkt der Bahnellipse ist. Durch geringe Änderung an i wird man bald zu einer definitiven Konstruktion gelangen. Aus ihr ergibt sich dann ein Wert für κ somit auch h . Sollte sich bei der eben erwähnten Methode ein sehr großer Betrag für die Neigung ergeben, so wird sich wegen der dadurch bedingten Unschärfe der Konstruktion, diese zur Bestimmung der Elemente nicht empfehlen. Man wird dann die für den zentralen Vorübergang entworfene zur Bestimmung genäherter Elemente verwenden und diese dann an der Hand der Tafel nach Verfahren S. 14 weiter behandeln.

Bisher war die Existenz eines Wendepunktes zur Voraussetzung gemacht. Tritt ein solcher aber nicht auf, so liegt die Neigung der Bahn unter einem leicht angebbaren Betrage. Es gilt nämlich

$$(1) \quad \varrho_0 < \sqrt{1 - \kappa^2},$$

$$(2) \quad \varrho_0 = a \cos i,$$

$$(3) \quad i > \arccos \left(\frac{\sqrt{1 - \kappa^2}}{a} \right),$$

d. h. damit ein Wendepunkt zustande kommt muß (1) gelten; aus (1) und (2) ergibt sich der Betrag den i in dem Falle überschreiten muß. Wenn in einem solchen Falle die Intensitätskurve zu undeutlich definiert ist, so wird man ein Näherungsverfahren einschlagen. Mit dem höchsten Werte von f als Wendepunktswert angenommen zunächst in die Tafel eingehen, an der Hand der ge-

fundenen α und ϱ ein erstes Elementensystem finden und dieses dann unter Berücksichtigung anderer Kurvenpunkte verbessern.

Hiermit ist das Problem der gleichförmig leuchtenden Scheiben, der Kreisbahn und der auf Grund dieser Annahmen notwendig bedingten Intensitätskurven erledigt.

Anwendung der entwickelten Methoden.

Für das System Z -Draconis gibt R. S. Dugan¹⁾ eine gut definierte Lichtkurve und ich möchte daher dieses als ersten Prüfstein für die neue Methode verwenden, zumal auch noch ein l. c. nach der Russellschen Methode gefundenes Elementensystem zum Vergleich dienen kann. Zur Ermittlung der Intensitätskurve wurde für das primäre Minimum $m_0 = 1.477^m$, für das sekundäre 1.468^m angenommen und die Größen w mit der gegebenen Periode von 1.357^d berechnet. Die folgenden Tafeln I und II enthalten die Berechnung. Die einzelnen Spalten tragen als Überschriften die bekannten Bezeichnungen, nur zur ersten möchte ich bemerken, daß hier nur der absteigende Ast in Betracht gezogen wurde, also die kleine Unsymmetrie gegenüber dem aufsteigenden, von Dugan zu 0.04^m angegeben, unberücksichtigt bleibt.

Tafel I für das primäre Minimum.

Phase	w	m	Δm	$\log n$	n	f_1
$3 \frac{h}{0}$	33.16	1.500	0.023	0.0092	1.021	0.021
$2 \frac{40}{0}$	29.48	1.513	0.036	0.0144	1.034	0.033
$2 \frac{20}{0}$	25.79	1.561	0.084	0.0336	1.080	0.074
$2 \frac{0}{0}$	22.11	1.651	0.174	0.0696	1.174	0.148
$1 \frac{40}{0}$	18.42	1.801	0.324	0.1296	1.348	0.258
$1 \frac{20}{0}$	14.74	2.036	0.559	0.2236	1.673	0.402
$1 \frac{0}{0}$	11.05	2.368	0.891	0.3564	2.272	0.560
$0 \frac{40}{0}$	7.37	2.835	1.358	0.5432	3.493	0.714
$0 \frac{20}{0}$	3.68	3.541	2.064	0.8256	6.693	0.851
$0 \frac{0}{0}$	0.0	4.050	2.573	1.0292	10.695	0.906

1) R. S. Dugan, Contrib. from the Princeton University Obs. No. 2, 1912.

Tafel II für das sekundäre Minimum.

Phase	w	m	Δm	$\log n$	n	f_1
^h ^m	^o					
13 30	33.16	1.468	0.000			0.0
14 0	27.63	1.470	0.002	0.0008	1.0018	0.0018
14 30	22.11	1.478	0.010	0.0040	1.0093	0.0092
15 0	16.56	1.490	0.022	0.0088	1.0205	0.0201
15 30	11.05	1.507	0.039	0.0156	1.0366	0.0353
16 0	5.58	1.524	0.056	0.0224	1.0529	0.0502
16 30	0.0	1.533	0.065	0.0260	1.0617	0.0581

Durch Auftragen der Größen f_1 nach den cosinus der zugehörigen w erhält man die Intensitätskurven. Von diesen werden in den Abszissen äquidistante Werte f'_1 abgelesen, deren Differenzen Δ auf graphischem Wege durch das Maximum der sie am besten darstellenden Kurve den Wendepunkt der Intensitätskurve geben. Die nötigen Daten sind in den Tafeln III und IV (S. 23) enthalten. Die graphische Darstellung gebe ich nur für das primäre Minimum und zwar in verkleinertem Maßstabe in Fig. 4a, b, c wieder. Die in 4a gegebenen Abszissen gelten für alle drei Figuren, während die Ordinaten jeweils angegeben sind. Zu 4c ist zu bemerken, daß ich zunächst der einfacheren graphischen Auflösung wegen eine durch die Gesichtslinie gehende Bahn zur Ermittlung eines ersten rohen Wertes von κ annehme. Dabei verfare ich folgendermaßen: von B aus, dem Punkte, der dem Beginn der Erscheinung entspricht, setze ich mit einem beliebigen Radius ρ ein und ziehe einen Bogen σ , dann trage ich ρ auf der in W , dem Wendepunkte der Intensitätskurve, errichteten Senkrechten auf und erhalte den Punkt R , durch diesen ziehe ich von M aus einen Bogen der σ in S schneidet. Die Projektion von S auf die Abszissenachse gibt den Punkt T . Die Originalkonstruktion erfolgte für das primäre und sekundäre Minimum auf Millimeterpapier, so daß durch Ablesen der Strecken MT und BT sofort Aufschluß über κ erlangt werden konnte. Da im primären Minimum zur Zeit des Wendepunktes schon mehr als die Hälfte der Fläche bedeckt ist, ist $\kappa > 1$, also ergibt sich

$$\frac{MT}{BT} = \kappa = 1.344$$

aus dem primären und

$$= 1.283$$

aus dem sekundären Minimum. Mit dem Mittelwert $\kappa = 1.314^1)$ gehe ich in Tabelle 2 S. 26, die für verschiedene κ , den Wendepunktsbetrag von f gibt, ein und erhalte $f = 0.704$. In der Intensitätskurve des primären Minimums lese ich an der Stelle des Wendepunktes $f_1 = 0.526$ ab. Aus diesen beiden Werten ge-

1) Nach der Russellschen Methode $\kappa = 1.242$.

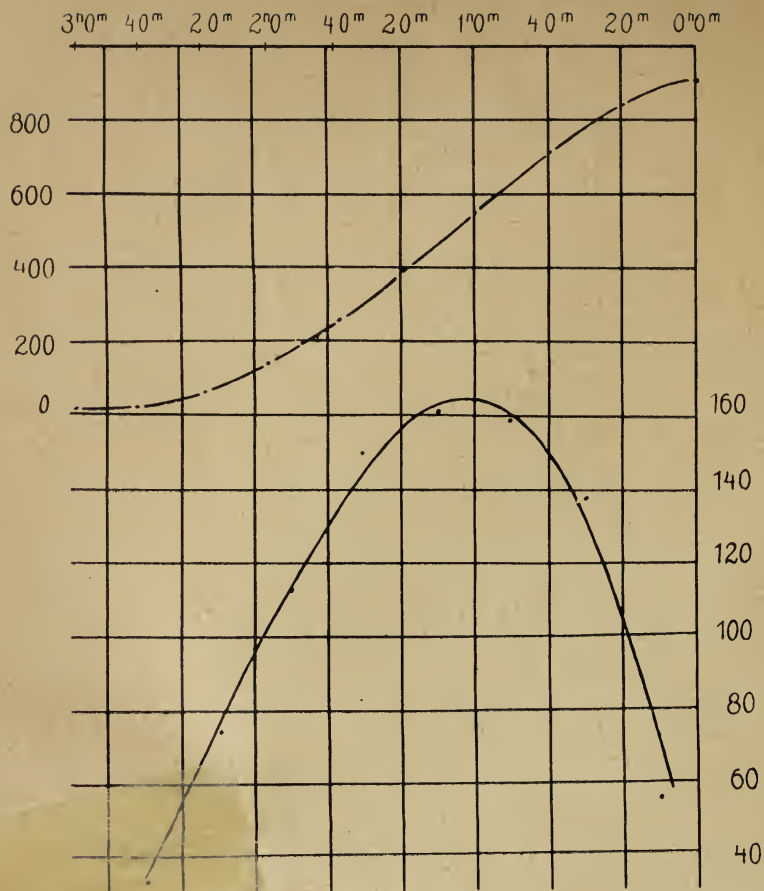


Fig. 4a.
Intensitäts-
kurve.

Fig. 4b.

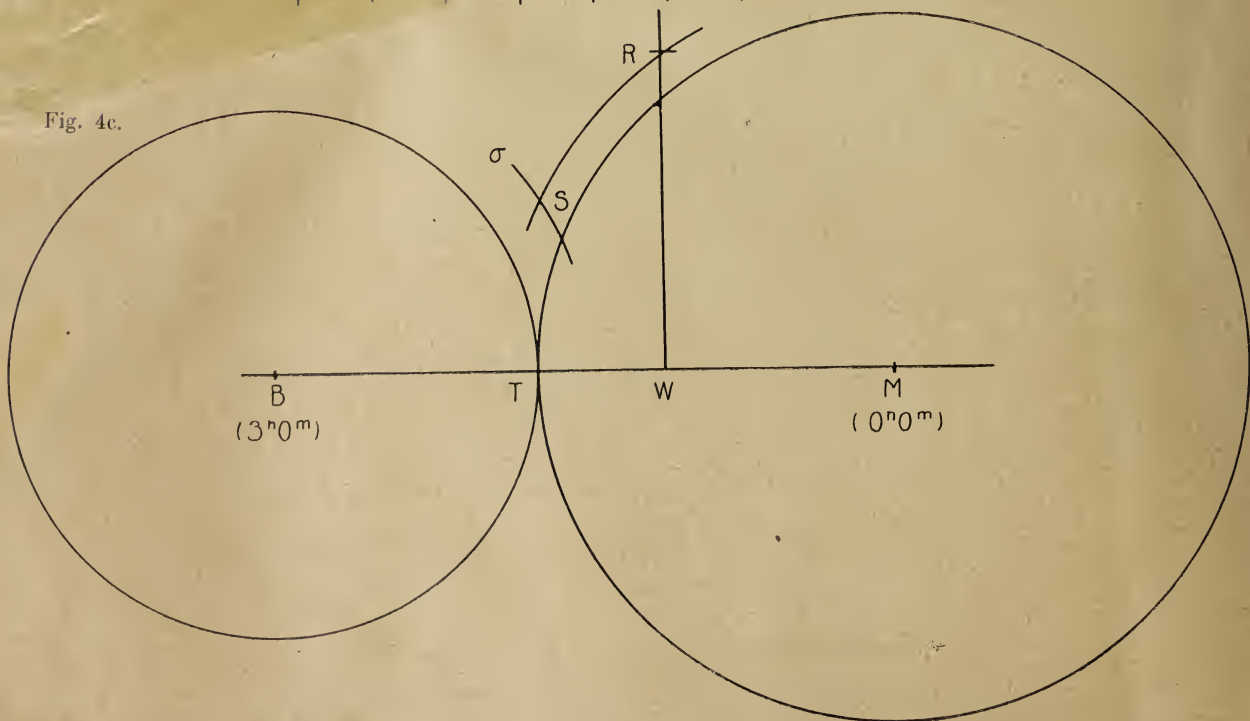


Fig. 4c.

lange ich nach Formel (11) S. 15 zur Bestimmung von h . Es gilt

$$\begin{aligned} 0.704 &= 0.526 \cdot (h + 1) \\ h &= 0.338. \end{aligned}$$

Behandle ich das sekundäre Minimum ebenso, d. h. betrachte ich den Begleiter als Hauptstern, so habe ich für $\kappa = 0.761$, aus Tabelle 2 $f = 0.407$, während die Intensitätskurve $f_1 = 0.0353$ und die Gleichung für h in der Form

$$\begin{aligned} 0.407 &= 0.0353 \cdot (h + 1) \\ h &= 10.529 \end{aligned}$$

gibt. Für den Hauptstern als Einheit muß ich hiervon den reziproken Wert, also

$$h = 0.095$$

nehmen. Schon der große Unterschied der beiden für h gefundenen Werte veranlaßte zunächst Bedenken gegen die Genauigkeit der Wendepunktsermittlung, die ja unter der Annahme vollständiger Exaktheit der Intensitätskurve ausgeführt wurde. Obwohl sich die Kurve den berechneten Größen f_1 vollständig anpaßt, so ist doch der Fehler dieser Größen, der sich nach Dugans Angabe des wahrscheinlichen Fehlers eines Wertes der mittleren Lichtkurve zu $\Delta m = \pm 0.016$ Größenklassen, also in Intensitäten zu $\Delta f = \pm 0.015$ ergibt, zu berücksichtigen. Ich habe darum zunächst beim primären Minimum den Wendepunkt mir soweit verschoben gedacht, daß die Ablesung an der Intensitätskurve 0.600 ergab. Die dieser Verschiebung entsprechende Verkleinerung von κ lasse ich unberücksichtigt, wodurch, wie aus Tabelle 2 zu ersehen ist, die Gewähr einen kleineren Wert von $(h + 1)$ zu erhalten noch vergrößert wird. Der nun erhaltene Wert von $h + 1 = 1.17$ gibt aber mit dem ersten Wert von f'_1 der Tafel III multipliziert 1.060. Es ergibt sich also auch noch bei starker Änderung des Wendepunktes der in den Größen f definiert durch Gleichung (11) S. 15 der Tafel III enthaltene Widerspruch, daß die größten die Einheit übersteigen. Ähnliches gilt für das sekundäre Minimum. Die Größen f in den Tafeln III und IV sind mit den oben erhaltenen Werten von $(h + 1)$ gerechnet. Würde man nun $(h + 1)$ zu Beginn der Erscheinung von großem Betrage, und dann allmählich abnehmend wählen, so hieße das, die Intensität des Begleiters ist je weiter die Bedeckung fortschreitet kleiner im Verhältnis zu der des Hauptsternes, dieser hätte also eine nach der Mitte zu zunehmende Intensitätsverteilung.

Tafel III für das primäre, Tafel IV für das sekundäre Minimum.

f'_1	Δ	f	f'_1	Δ	f
0.906		1.210	0.0581		0.670
851	55	1.137	536	45	618
713	138	0.953	451	85	520
554	159	740	347	104	400
393	161	525	241	106	278
243	150	325	151	90	174
130	113	174	76	75	88
056	74	075	23	53	27
024	32	032	1	22	1

Da nach Obigem eine Abschattierung nach dem Rande zu zu vermuten ist, die hier gegebenen Methoden also erst umzuarbeiten wären, so sehe ich von der Bestimmung der weiteren Elemente ab, doch möchte ich hervorheben, daß die nach der Russellschen Methode von Dugan gefundenen Elemente so geringe Abweichungen von Beobachtung und Rechnung geben, daß vorläufig eine Berechtigung zur weiteren Komplizierung der Annahmen nicht vorzuliegen scheint.

Ist dagegen eine Abschattierung nach dem Rande zu vorhanden, so wird diese für verschiedene Spektralgebiete verschieden sein und ich habe daher zur weiteren Untersuchung dieser Frage das System *RR* Draconis bearbeitet, da von diesem sowohl eine photographische als auch eine photovisuelle Lichtkurve von F. H. Seares¹⁾ veröffentlicht ist. Die folgende Tafel V enthält die Berechnung der Intensitätskurven und zwar wurde die Periode zu 2.831^d , $m_0 = 9.64^m$ für die photographische, $m_0 = 9.98^m$ für die photovisuelle Kurve angenommen.

Tafel V.

Phase	α	Photographisch				Photovisuell			
		m	Δm	n	f_1	m	Δm	n	f_1
0.030	3.82	13.43	3.79	32.810	0.970	13.20	3.22	19.409	0.948
40	5.09	12.73	3.09	17.219	942	12.63	2.65	11.482	913
50	6.36	12.08	2.44	9.462	894	12.18	2.20	7.586	868
60	7.63	11.56	1.92	5.861	829	11.82	1.84	5.445	816
70	8.90	11.10	1.52	4.055	754	11.52	1.54	4.131	758
80	10.17	10.67	1.23	2.805	678	11.24	1.26	3.192	687
90	11.45	10.29	1.01	2.335	606	11.00	1.02	2.559	609
100	12.72	10.45	0.81	2.109	526	10.81	0.83	2.148	534
110	13.99	10.30	0.66	1.837	455	10.66	0.68	1.871	465
120	15.26	10.17	0.53	1.629	386	10.53	0.55	1.660	397
130	16.53	10.07	0.43	1.486	327	10.42	0.44	1.500	333
140	17.80	9.98	0.34	1.368	269	10.31	0.33	1.355	262
150	19.07	9.89	0.25	1.259	206	10.23	0.25	1.259	206
160	20.35	9.82	0.18	1.180	153	10.16	0.18	1.180	153
170	21.62	9.76	0.12	1.117	105	10.10	0.12	1.117	105
180	22.89	9.71	0.07	1.067	62	10.05	0.07	1.067	062
190	24.16	9.68	0.04	1.038	36	10.02	0.04	1.038	036
200	25.43	9.66	0.02	1.019	18	10.00	0.02	1.019	018
210	26.70	9.65	0.01	1.009	9	9.99	0.01	1.009	009

Die aus Tafel V erhaltenen Intensitätskurven ergaben dann die in Tafel VI enthaltenen, in den Abszissen äquidistanten Werte f_1' und deren Differenzen Δ ,

1) F. H. Seares, The Algol Variable *RR* Draconis. Contrib. fr. Mt. Wilson, Obs., No. 68.

Tafel VI.

Photographisch		Photovisuell	
f_1	Δ	f_1	Δ
0.970		0.948	
	28		35
942	48	913	45
894	68	868	52
826	76	816	60
750	78	756	70
672	78	686	80
594	73	606	79
521	74	527	73
447	73	454	70
374	69	384	72
305	62	312	66
243	61	246	57
182	54	189	54
128	45	135	47
83	36	88	42
47		46	

die dann auf graphischem Wege zur Kenntnis von κ führten. Aus der photographischen Intensitätskurve ergab sich $\kappa = 1.436$ und aus der photovisuellen $\kappa = 1.583$ ¹⁾. Man könnte nun leicht versucht sein, eine Abschattierung dadurch mit aller Gewißheit nachgewiesen zu haben, die für den photographischen Teil stärker wäre als für den visuellen, denn es wird der Wendepunkt der Intensitätskurve immer mehr der Mitte der Verfinsterung zurücken, je größer die Abschattierung ist, wobei auch gleichzeitig κ , wenn es größer als Eins ist, im Betrage kleiner wird. Dieser Schluß wird aber erst dann erlaubt sein, wenn die mit dem gefundenen κ gerechnete Intensitätskurve von der beobachteten um größere Beträge als die der Beobachtungsfehler abweicht. Ich habe daher sofort eine Erweiterung meiner Tabelle 1 für größere Werte von κ in Angriff genommen und es sollen dann die Resultate sobald als möglich mitgeteilt werden.

1) Die hier gegebenen Werte von κ sollen nur die Verschiedenheit der Lösung aus den beiden Lichtkurven dartun, während ihre definitiven Beträge sich erst bei Berücksichtigung der Neigung, die hier zu 90° angenommen worden ist, ergeben werden. Es sei noch ein erster Versuch mit $i = 80^\circ$ mitgeteilt, für den sich κ zu 1.70 aus der photographischen, zu 1.95 aus der photovisuellen Kurve ergeben hat.

Tabelle 1. $f(q, \kappa)$.

$\kappa \backslash q$	1.5	1.4	1.3	1.2	1.1	1.0	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3
2.4	0.015												
2.3	041	0.014											
2.2	075	040	0.014										
2.1	114	074	040	0.014									
2.0	158	113	073	039	0.014								
1.9	206	156	111	071	038	0.013							
1.8	258	204	154	109	070	037	0.013						
1.7	312	255	201	151	107	068	036	0.013					
1.6	369	308	251	197	148	104	066	035	0.012				
1.5	428	365	304	246	193	144	101	064	034	0.011			
1.4	489	423	359	298	241	188	140	098	061	032	0.011		
1.3	551	484	417	353	292	235	182	135	093	058	030	0.010	
1.2	615	545	477	410	346	285	228	176	129	088	054	027	0.009
1.1	678	608	538	469	401	337	276	219	167	121	082	049	024
1.0	742	672	600	529	459	391	326	265	208	157	112	073	042
0.9	804	735	664	591	518	447	378	312	251	194	143	098	061
0.8	865	798	727	654	579	505	432	361	295	232	175	123	079
0.7	921	860	791	717	641	564	487	412	339	270	206	146	090
0.6		917	853	781	704	624	543	462	383	307	232	160	
0.5		978	912	844	767	685	600	513	426	339	250		
0.4			961	895	831	747	657	563	465	360			
0.3				961	894	810	714	609	490				
0.2					954	873	769	640					
0.1						936	810						

Tabelle 2. $f_w(\kappa)$.

κ	f_w	κ	f_w	κ	f_w
1.55	0.659	1.10	0.794	0.65	0.279
1.50	667	1.05	841	0.60	232
1.45	675	1.00	1.000	0.55	190
1.40	684	0.95	0.754	0.50	154
1.35	695	0.90	637	0.45	122
1.30	708	0.85	542	0.40	094
1.25	722	0.80	462	0.35	071
1.20	740	0.75	393	0.30	051
1.15	763	0.70	333		

Bemerkung zu den Tabellen. Für jedes κ wurde für die verschiedenen q der Ausdruck (2) S. 12 berechnet. Der hierdurch gegebene cosinus des einen Winkels ergibt dann die anderen für die Berechnung der bedeckten Fläche nötigen Größen. Die Rechnungen wurden von Frl. Erna Wiele, der Rechnerin der Sternwarte ausgeführt, die Resultate durch Differenzenschema geprüft und dann auf die hier gegebenen drei Stellen abgekürzt.

Lebenslauf.

Ich, Josef Weber, wurde geboren am 6. Juli 1888 zu Morawetz in Mähren als Sohn des Gutsverwalters Franz Weber und seiner Frau Clara geb. Stolzenberg. Heimat der Eltern war Reichenberg in Böhmen. Den ersten Unterricht genoß ich im Elternhause. Mit der Ernennung meines Vaters zum Fischereiinspektor kam ich nach Brünn, bestand daselbst im Sommer 1898 die Aufnahmeprüfung in das erste Staatsgymnasium und verließ diese Anstalt im Sommer 1906 mit dem Reifezeugnis. Die während der folgenden beiden Semester in Wien an der Universität begonnenen mathematisch-physikalischen Studien, setzte ich durch weitere zwei Semester in Graz fort. Von da aus ging ich zum Winter 1908 nach Göttingen. Hatte ich zwar schon in Wien bei Weiß und v. Hepperger die ersten astronomischen Vorlesungen gehört, so war doch der weitaus größte Teil meiner Studien der mathematischen Physik gewidmet.

Meine astronomische Ausbildung erhielt ich in den Vorlesungen und praktischen Übungen der Herren Professoren L. Ambronn und J. Hartmann und ich möchte ihnen hierfür meinen verbindlichsten Dank ausdrücken.

